

ET I Übung 2

Aufbau:

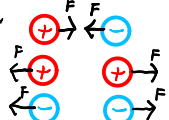
- Nachbesprechen alter Serie
 - Theorie Repetition
- (Pause)
- Alte Prüfungsaufgabe zusammen
 - Selber lösen + Fragen + Tipps

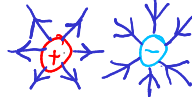
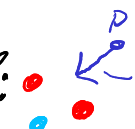
Persönliche Webseite (HS 24)



n.ethz.ch/~kursulovic

REPETITION ELEKTROSTATIK

Kräfte:  $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \vec{r}_{12}$ Ladungen: Linien: $\lambda = \frac{dQ}{dl}$ Flächen: $\sigma = \frac{dQ}{dA}$ Raum: $\rho = \frac{dQ}{dV}$

E-Feld:  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$ An einem Punkt P :  Mit Ladungen: $\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r}_P - \vec{r}_i|^3} \vec{r}_i$ Mit Ladungsdichten: $\vec{E}(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r}_P - \vec{r}'}{|\vec{r}_P - \vec{r}'|^3} d\vec{r}'$

El. Arbeit: $W_{e12} = Q_1 \int_{r_1}^{r_2} (-\vec{E}) d\vec{s}$  El. Potential: $\varphi(\vec{r}_P) = \frac{W_{e\infty P}}{Q} = - \int_{\infty}^P \vec{F} d\vec{s}$ Spannung: $U_{12} = \varphi(P_1) - \varphi(P_2) = \int_{P_2}^{P_1} \vec{E} d\vec{s}$

Konservativ: $\oint_{C_1} \vec{E} d\vec{s} = \oint_{C_2} \vec{E} d\vec{s}$ Bzw. Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$
 $\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0$ $C = C_1 + C_2$

El. Flussdichte: $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ Gauss'sches Gesetz: E.g. Kugel $\oint_V \vec{D} d\vec{A} = Q = \Psi$  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$

Kondis:

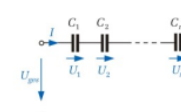
Kapazität: $C = \frac{Q}{U}$

Für Plattenkondi: $C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$

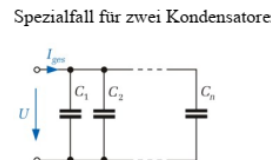
Energie in Kondis:

$W_{ec} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C U^2$

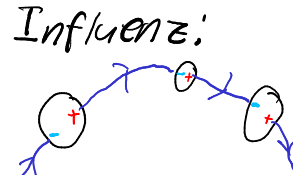
Serienschaltung: $C_{ser}^{-1} = \sum_{k=1}^n C_k^{-1}$
 $C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$
Spannungsteiler: $U_1 = U_{ges} \frac{C_1^{-1}}{\sum_n C_n^{-1}}$
 $U_1 = U_{ges} \frac{C_2}{C_1 + C_2}$
Parallelschaltung: $C_{parr} = \sum_{k=1}^n C_k$
Ladungsteiler: $Q_1 = Q_{ges} \frac{C_1}{\sum_n C_n}$
 $Q_1 = Q_{ges} \frac{C_1}{C_1 + C_2}$



Spezialfall für zwei Kondensatoren

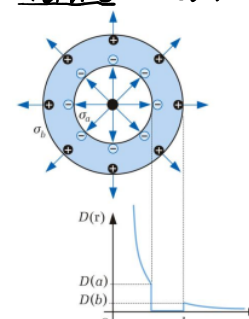


Spezialfall für zwei Kondensatoren

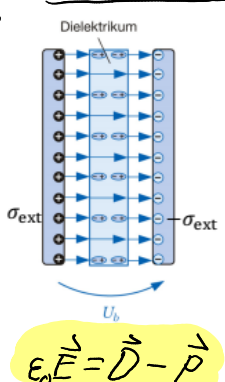


Influenz:

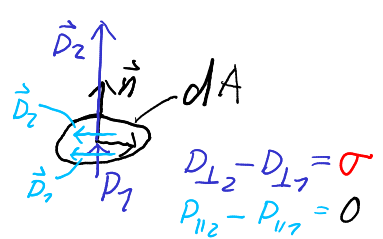
Elektrostatik: Keine Felder im Leiter



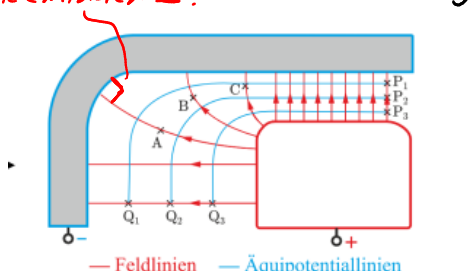
Polarisation:



E-Feldlinien & Equipotentiallinien:



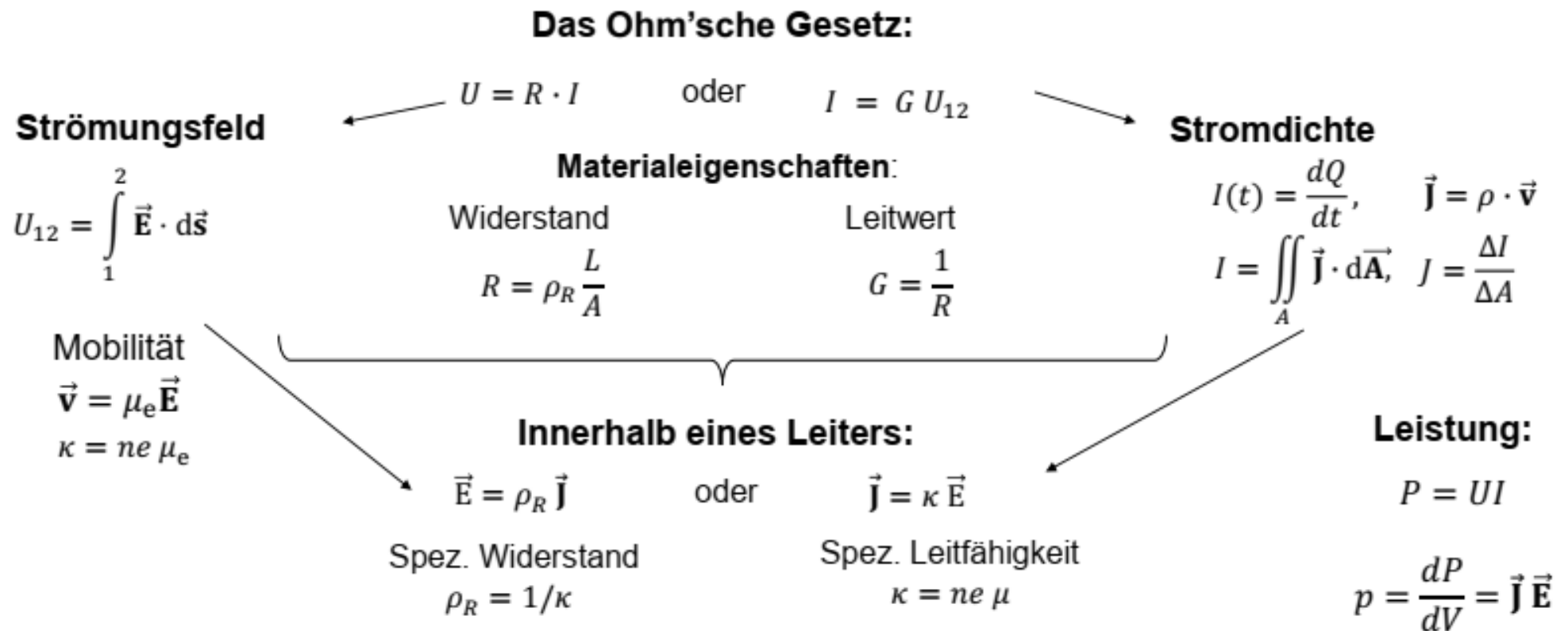
Reminder $\perp$! -linien (2D)



STATIONÄRES ELEKTRISCHES STRÖMUNGSFELD

Formelsammlung, S. 3

Mindmap

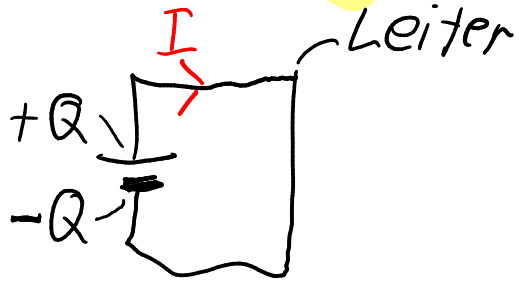


ELEKTROSTATIK $\rightarrow$ ELEKTRODYNAMIK

ELFKIRISCHER STROM & STROMDICHTHE

Elektrischer Strom: $\xrightarrow{I}$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = A \text{ "Ampere"}$$



TECHNISCHE
STROMRICHTUNG:
+ $\rightarrow$ -

stromdichte:

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \quad [J] = \frac{A}{m^2}$$



Raumladungsdichte (siehe letzte Woche)

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$$

Geschwindigkeitsvektor (Fluiddynamik)

$\vec{J}$ & A können variieren $\Rightarrow$ Allgemein:

$$I = \iint_A \vec{J}_{(A)} \cdot d\vec{A}$$

Wir reden hauptsächlich vom
Konvektionsstrom I_K

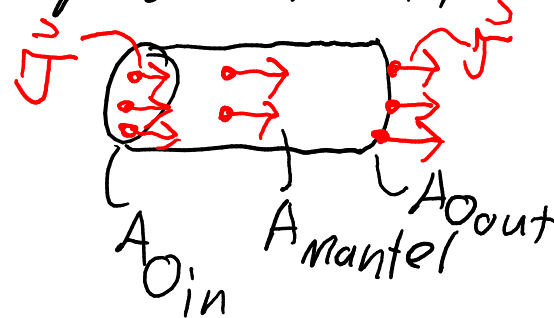
$\hookrightarrow$ Elektronen in Bewegung

KONTINUITÄTSGLEICHUNG (Aus Fluiddynamik) (Weniger Wichtig) $\Rightarrow$ Konzept wichtig für Knotenregel

$$\oint_{\partial V=A} \vec{J} d\vec{A} = 0$$

$$\vec{A} = \vec{n} \cdot A$$

Bsp: Leiter mit el. Strom



$$\text{mit } \vec{J} = \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_{A_{0in}} \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA}_{-j_x A} + \underbrace{\iint_{A_{0out}} \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA}_{j_x \cdot A} + \underbrace{\iint_{A_{mantel}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}(\varphi) dA}_0 = 0$$

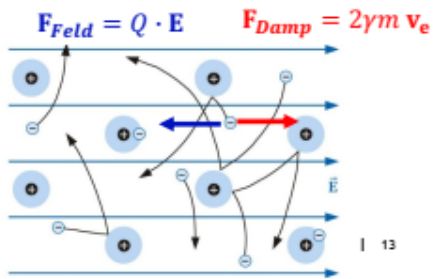
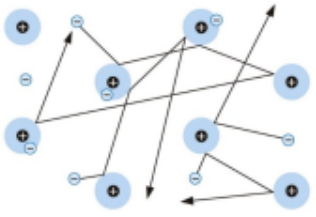
Differenziell:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\text{div}(\vec{J}) = \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z$$

$\hookrightarrow$ wenn stationär = 0

MOBILITÄT (Zwischenschritt um E-Feld & Strom zu verknüpfen) (Weniger Wichtig)



Elektronengeschwindigkeit!

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \mu_e \cdot \vec{E} = \frac{Q}{2\gamma m} \vec{E}$$

$$[\mu_e] = \frac{m^2}{Vs}$$

Löcher (holes bzw. positive Ladungen)

$$\vec{v}_H = \mu_H \cdot \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \kappa = n_e e \cdot \mu_e \quad [n_e] = \frac{e}{m^3} \quad n_e: \text{Elektronen(-ladungs)dichte}$$

{ Elementarladung (q_e)
von Elektronen $1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C (} e^- \text{)}$

SPEZIFISCHE(R) LEITFÄHIGKEIT/WIDERSTAND (Brücke E-Feld & Strom)

Spezifische Leitfähigkeit κ :
"wie gut ein Leiter Strom leitet"

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad [\kappa] = \frac{S}{m} \quad S: "Siemens"$$

Bzw. Spezifischer Widerstand:

$$\vec{E} = \rho_R \vec{J} \quad [\rho_R] = \Omega \cdot m \quad \Omega: "Ohm"$$

$$\rho_R = \frac{1}{\kappa}$$

VRI

Elektrische Felder $\rightarrow$ Potentialfeld

Potentialunterschied $\rightarrow$ Spannung

Leiter im im Potentialfeld $\rightarrow$ Strom

$\Rightarrow$ wird "gebremst" (bzw. limitiert) durch

Widerstand

$$\Rightarrow U = R \cdot I$$

$$R = \frac{\rho_R \cdot l}{A} \quad [R] = \Omega \quad \Omega: "Ohm"$$

$\Downarrow$ Wie R von komplexen Geometrien Definieren?
 $\Rightarrow$ VRI!

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_0^L \vec{E} d\vec{s}}{\iint_A \vec{j} d\vec{A}} = \frac{\int_0^L \vec{E} d\vec{s}}{\iint_A \kappa \vec{E} d\vec{A}}$$

$$I = G U$$

$$G = \frac{1}{R}$$

— Forget this one
important for computational
Electrical Engineering



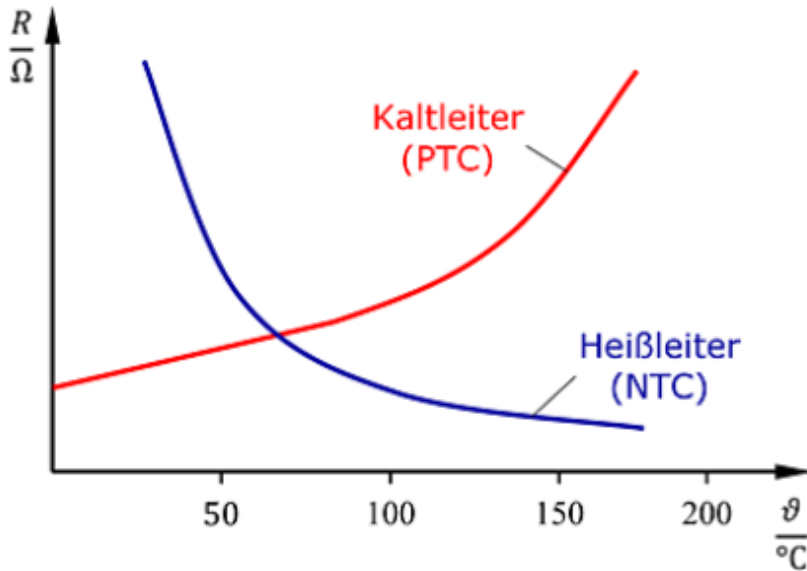
WIDERSTÄNDE

Der Spezifische Widerstand ist Temperaturabhängig!

$$\Rightarrow R(T) = \frac{\rho}{A} \rho_{20^\circ\text{C}} (1 + \alpha \Delta T + \underbrace{\beta \Delta T^2}_{\text{Wird meist vernachlässigt}})$$

← aus Taylor Expansion

Wird meist vernachlässigt



NTC: Negativer Temperatur Koeffizient
Nashörner lieben

Warm $\Rightarrow$ Leiten besser

Wenns warm ist,

• Halbleiter $\rightarrow$ CPU/GPU

Kühlen sonst hohe

Energiekosten bzw. Kurzschluss

PTC: Positiver Temperatur Koeffizient

Pinguine lieber kalt

$\Rightarrow$ Leiten im kalten besser

• Kupfer $\rightarrow$ Stromleitungen

im Sommer $\Rightarrow$ Netz ist mehr ausgelastet.

ELEKTRISCHE LEISTUNG

$$P = UI \quad [P] = W \quad W: "Watt"$$

Leistungsdichte:

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad [p] = \frac{W}{m^3}$$

($\hookrightarrow$) $\vec{E} \hat{=}$ Spannungsdichte! $\rightarrow$ cool 



1. Elektrostatik

7 Punkte

Betrachten Sie die Anordnung in Abb. 1, bestehend aus drei konzentrischen Leitern mit den Radien a, b, c . Leiter 1 sei mit einer Ladung Q_1 geladen, Leiter 2 und 3 mit Q_2 und Q_3 . Wir benutzen ein zylindrisches Koordinatensystem (r, φ, z) mit der z -Achse zentriert im Kabel.

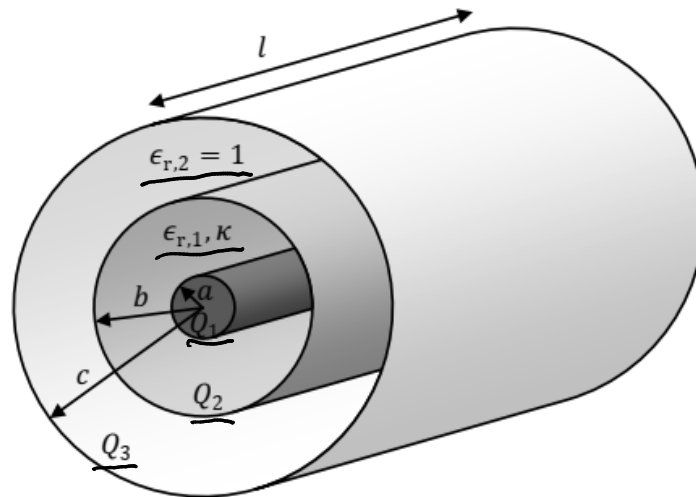


Abb. 1

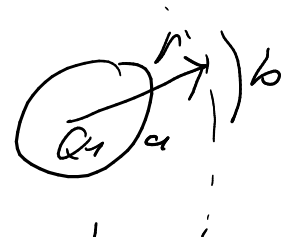
(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Bereich $a < r < b$.

(2 P)

Gauss'sches Gesetz:

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \oint \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{r} \tilde{n} dl = Q_1$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{\epsilon_{r,1} \epsilon_0 2\pi r \tilde{n} l} \text{ für } a < r < b$$



Lösung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{\epsilon_{r,1} \epsilon_0 2\pi r \tilde{n} l} \vec{e}_r$$

- (b) Nun bezeichnen wir die Potentiale der drei Leiter als ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Aus dem E-Feld finden wir die Spannung $U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q_1}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,1}} \log\left(\frac{b}{a}\right)$. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Spannung die Kapazität C_{12} zwischen Leiter 1 und 2. (1 P)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,1}} \log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Lösung:

$$C_{12} = 2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,1} \frac{1}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- (c) Schreiben Sie die Kapazität C_{23} zwischen den Leitern 2 und 3 auf (keine erneute Rechnung nötig). (1 P)

Gemäss b)

$$U = \frac{(Q_1 + Q_2)}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,2}} \log\left(\frac{c}{b}\right)$$

$\underbrace{\epsilon_{r,2}}_{=1}$

Lösung:

$$C_{23} = 2\pi l \epsilon_0 \frac{1}{\log\left(\frac{c}{b}\right)}$$

- (d) Da das Material im Inneren zusätzlich eine Leitfähigkeit κ hat, fließt ein Strom. Die Stromdichte im Bereich $a < r < b$ lautet $\vec{J}(r) = \frac{\kappa U_{12}}{\log(\frac{b}{a})r}$. Berechnen Sie daraus zuerst den Strom I_{12} und dann den Widerstand R_{12} . (2 P)

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \iint \vec{J}(r) \cdot d\vec{A} = \frac{\kappa U_{12}}{\log(\frac{b}{a})} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} \kappa \cdot d\varphi \cdot r \cdot dr \\ &= \frac{\kappa U_{12}}{\log(\frac{b}{a})} 2\pi l \end{aligned}$$

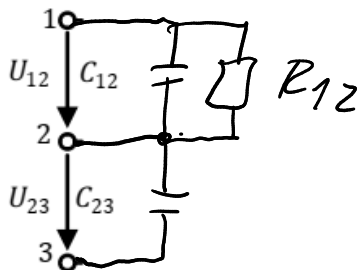
$$\begin{aligned} U &= RI \\ \Rightarrow R &= \frac{U}{I} = \frac{\log(\frac{b}{a})}{\kappa 2\pi l} \end{aligned}$$

Lösung:

$$R_{12} = \frac{\log(b/a)}{\kappa 2\pi l}$$

- (e) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild der Anordnung mit den oben berechneten Elementen. (1 P)

Lösung:



Tipps:

1. Ähnlich wie Prüfungsaufgabe.
R für komplexe Geometrien!

2 Lösungswege: - über Stromdichte

- über E-Feld

↳ wie kann man $\iint_A \vec{E} d\vec{A}$

ausdrücken aus dem was man
schon ausgerechnet hat $\rightarrow D$?

2. Netzwerke vereinfachen auf Form
von a)

$\Rightarrow$ Brute Force Rechnen

$\Rightarrow$ Skizze sehr hilfreich

3. Denkt euch die Stromdichte etwas durch