

ET I Übung 2

Aufbau:

- Umfrage zum Übungsunterricht
- Nachbesprechen alter Serie
- Theorie Repetition

(Pause)

- Alte Prüfungsaufgabe zusammen
- Selber lösen + Fragen + Tipps



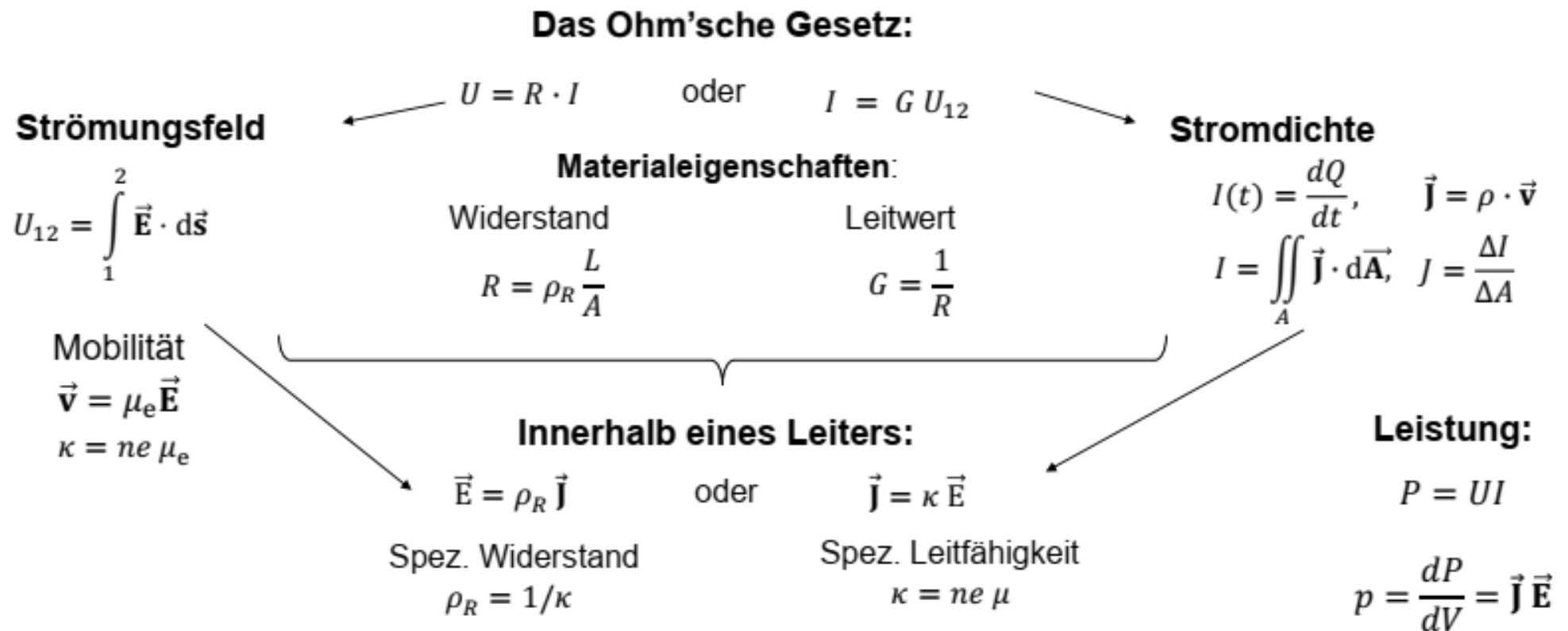
n.ethz.ch/~kursulovic

NACHBESPRECHUNG

STATIONÄRES ELEKTRISCHES STRÖMUNGSFELD

Formelsammlung, S. 3

Mindmap

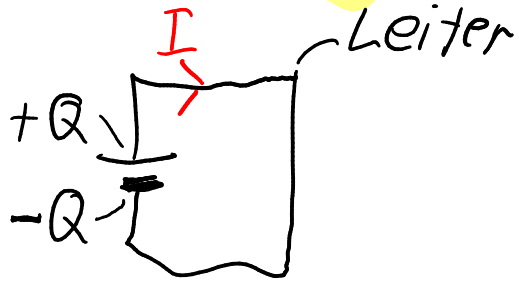


ELEKTROSTATIK $\rightarrow$ ELEKTRODYNAMIK

ELFKIRISCHER STROM & STROMDICHTHE

Elektrischer Strom: $\xrightarrow{I}$

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} \quad [I] = A \text{ "Ampere"}$$



TECHNISCHE
STROMRICHTUNG:
+ $\rightarrow$ -

stromdichte:

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \quad [J] = \frac{A}{m^2}$$



Raumladungsdichte (siehe letzte Woche)

$$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$$

Geschwindigkeitsvektor (Fluiddynamik)

$\vec{J}$ & A können variieren $\Rightarrow$ Allgemein:

$$I = \iint_A \vec{J}_{(A)} \cdot d\vec{A}$$

Wir reden hauptsächlich vom
Konventionsstrom I_K

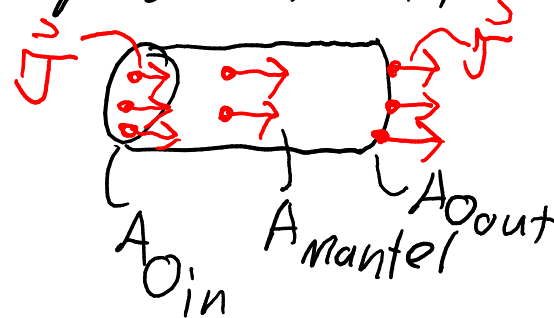
$\hookrightarrow$ Elektronen in Bewegung

KONTINUITÄTSGLEICHUNG (Aus Fluiddynamik) (Weniger Wichtig)

$$\oint_{\partial V=A} \vec{J} d\vec{A} = 0$$

$$\vec{A} = \vec{n} \cdot A$$

Bsp: Leiter mit el. Strom



$$\text{mit } \vec{J} = \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\iint_{A_{0,in}} \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA}_{-j_x A} + \underbrace{\iint_{A_{0,out}} \begin{pmatrix} j_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dA}_{j_x \cdot A} + \underbrace{\iint_{A_{Mantel}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}(\varphi) dA}_0 = 0$$

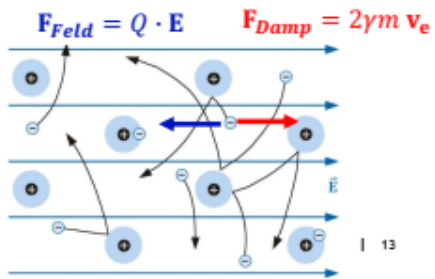
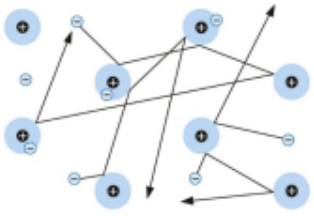
Differenziell:

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

$$\text{div}(\vec{J}) = \partial_x j_x + \partial_y j_y + \partial_z j_z$$

↳ wenn stationär = 0

MOBILITÄT (Zwischenschritt um E-Feld & Strom zu verknüpfen) (Weniger Wichtig)



Elektronengeschwindigkeit!

$$\Rightarrow \vec{v}_e = \mu_e \cdot \vec{E} \quad [\mu_e] = \frac{m^2}{Vs}$$

Löcher (holes bzw positive Ladungen)

$$\vec{v}_H = \mu_H \cdot \vec{E}$$

$$\hookrightarrow \kappa = n_e e \cdot \mu_e \quad [n_e] = \frac{e^-}{m^3} \quad n_e: \text{Elektronen(-ladungs)dichte}$$

{ Elementarladung (qe)
von Elektronen $1.6 \cdot 10^{-19} C (e^-)$

SPEZIFISCHE(R) LEITFÄHIGKEIT/WIDERSTAND (Brücke E-Feld & Strom)

Spezifische Leitfähigkeit κ :
"wie gut ein Leiter Strom leitet"

$$\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad [\kappa] = \frac{S}{m} \quad S: "Siemens"$$

Bzw. Spezifischer Widerstand:

$$\vec{E} = \rho_R \vec{J} \quad [\rho_R] = \Omega \cdot m \quad \Omega: "Ohm"$$

$$\rho_R = \frac{1}{\kappa}$$

VRI

Elektrische Felder $\rightarrow$ Potentialfeld

Potentialunterschied $\rightarrow$ Spannung

Leiter im im Potentialfeld $\rightarrow$ Strom

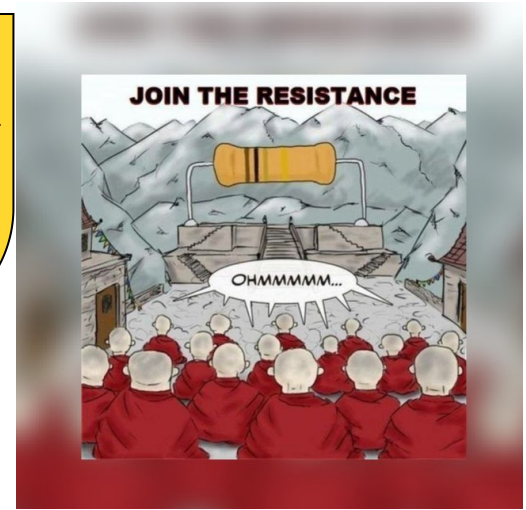
$\Rightarrow$ wird "gebremst" (bzw. limitiert) durch

Widerstand

$$\Rightarrow U = R \cdot I$$



Literally
him in ET



$$R = \frac{\rho_R \cdot l}{A} \quad [R] = \Omega \quad \Omega: "Ohm"$$

$\Downarrow$ Wie R von komplexen Geometrien Definieren?
 $\Rightarrow$ VRI!

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int_0^L \vec{E} d\vec{s}}{\iint_A \vec{j} d\vec{A}} = \frac{\int_0^L \vec{E} d\vec{s}}{\iint_A \kappa \vec{E} d\vec{A}}$$

$$I = G U \quad \text{— Forget this one}$$

$$G = \frac{1}{R}$$

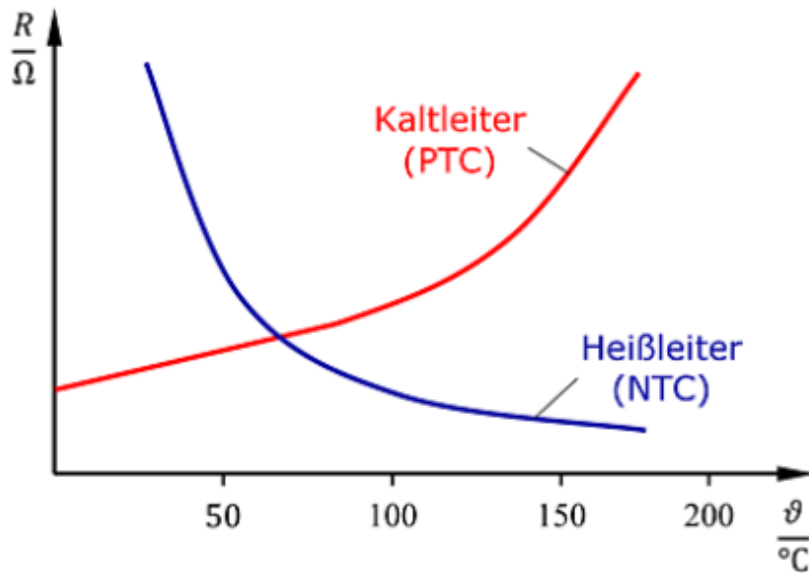
WIDERSTÄNDE

Der spezifische Widerstand ist Temperaturabhängig!

$$\Rightarrow R(T) = \frac{\rho}{A} \rho_{20^\circ\text{C}} (1 + \alpha \Delta T + \beta \Delta T^2)$$

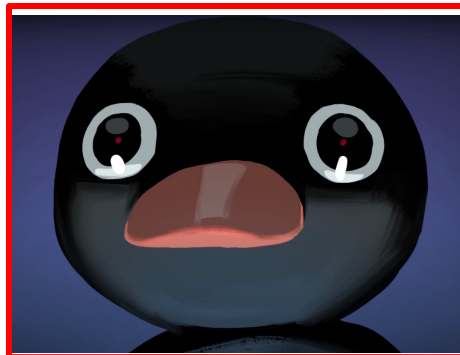
← aus Taylor
Expansion

Wird meist
vernachlässigt



NTC:

Nashörner lieben
Warm $\Rightarrow$ Leiten besser
Wenns warm ist.
• Halbleiter $\rightarrow$ CPU/GPU
Kühlen sonst hohe
Energiekosten bzw. Kurz-
schluss

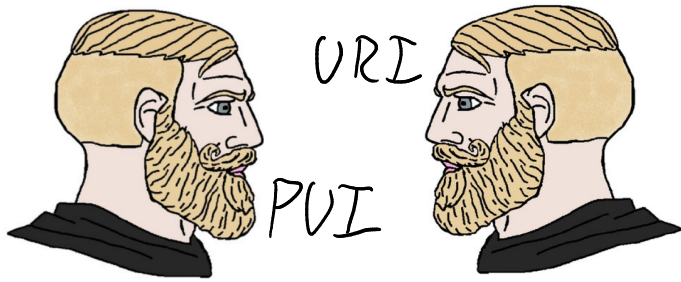


PTC:

Pinguine lieben kalt
 $\Rightarrow$ Leiten im kalten besser
• Kupfer $\rightarrow$ Stromleitungen
im Sommer $\Rightarrow$ Netz ist mehr
ausgelastet.

ELEKTRISCHE LEISTUNG

$$P = UI \quad [P] = W \quad W: "Watt"$$



Leistungsdichte:

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{E} \cdot \vec{J} \quad [p] = \frac{W}{m^3}$$

$\hookrightarrow \vec{E} \hat{=} \text{Spannungsdichte!} \rightarrow \text{cool!}$



1. Elektrostatik

7 Punkte

Betrachten Sie die Anordnung in Abb. 1, bestehend aus drei konzentrischen Leitern mit den Radien a, b, c . Leiter 1 sei mit einer Ladung Q_1 geladen, Leiter 2 und 3 mit Q_2 und Q_3 . Wir benutzen ein zylindrisches Koordinatensystem (r, φ, z) mit der z -Achse zentriert im Kabel.

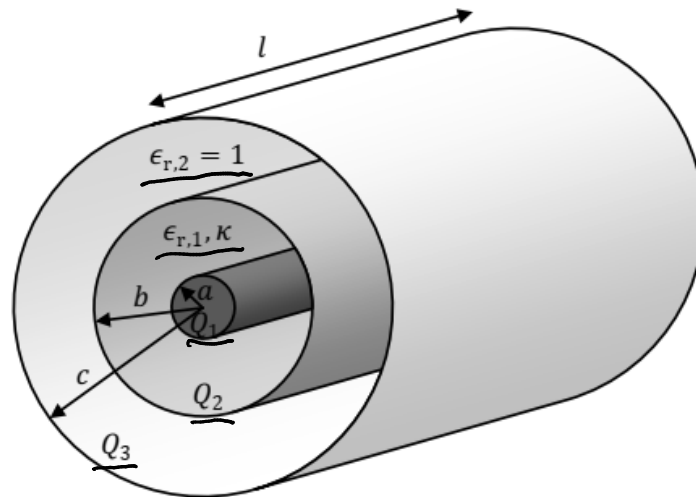


Abb. 1

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im Bereich $a < r < b$.

(2 P)

Gauss'sches Gesetz:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \cdot r \hat{r} d\tilde{\Omega} = Q_1$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi r l} \hat{r} \quad \text{für } a < r < b$$



Lösung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q_1}{\epsilon_r \epsilon_0 2\pi r l} \hat{r}$$

- (b) Nun bezeichnen wir die Potentiale der drei Leiter als ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Aus dem E-Feld finden wir die Spannung $U_{12} = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q_1}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,1}} \log\left(\frac{b}{a}\right)$. Berechnen Sie mit Hilfe dieser Spannung die Kapazität C_{12} zwischen Leiter 1 und 2. (1 P)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{Q_1}{\frac{Q_1}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,1}} \log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Lösung:

$$C_{12} = 2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,1} \frac{1}{\log\left(\frac{b}{a}\right)}$$

- (c) Schreiben Sie die Kapazität C_{23} zwischen den Leitern 2 und 3 auf (keine erneute Rechnung nötig). (1 P)

Gemäss b)

$$U = \frac{(Q_1 + Q_2)}{2\pi l \epsilon_0 \epsilon_{r,2}} \log\left(\frac{c}{b}\right)$$

$\underbrace{\epsilon_{r,2}}_{=1}$

Lösung:

$$C_{23} = 2\pi l \epsilon_0 \frac{1}{\log\left(\frac{c}{b}\right)}$$

- (d) Da das Material im Inneren zusätzlich eine Leitfähigkeit κ hat, fließt ein Strom. Die Stromdichte im Bereich $a < r < b$ lautet $\vec{J}(r) = \frac{\kappa U_{12}}{\log(\frac{b}{a})r}$. Berechnen Sie daraus zuerst den Strom I_{12} und dann den Widerstand R_{12} . (2 P)

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \iint \vec{J}(r) \cdot d\vec{A} = \frac{\kappa U_{12}}{\log(\frac{b}{a})} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{r} \kappa \cdot d\varphi \cdot r \cdot dr \\ &= \frac{\kappa U_{12}}{\log(\frac{b}{a})} 2\pi l \end{aligned}$$

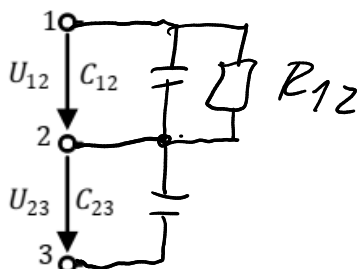
$$\begin{aligned} U &= RI \\ \Rightarrow R &= \frac{U}{I} = \frac{\log(\frac{b}{a})}{\kappa 2\pi l} \end{aligned}$$

Lösung:

$$R_{12} = \frac{\log(b/a)}{\kappa 2\pi l}$$

- (e) Zeichnen Sie ein Ersatzschaltbild der Anordnung mit den oben berechneten Elementen. (1 P)

Lösung:



Tipps:

1. Ähnlich wie Prüfungsaufgabe.
R für komplexe Geometrien!

2 Lösungswege: - über Stromdichte

- über E-Feld

↳ wie kann man $\iint_A \vec{E} d\vec{A}$

ausdrücken aus dem was man
schon ausgerechnet hat $\rightarrow D$?

2. Netzwerke vereinfachen auf Form
von a)

$\Rightarrow$ Brute Force Rechnen

$\Rightarrow$ Skizze sehr hilfreich

3. Denkt euch die Stromdichte etwas durch