

ET I Übung 6

Aufbau:

- Fragen zu Netzwerken
- Nachbesprechen alter Serie
- Theorie Repetition

(Pause)

- Alte Prüfungsaufgabe zusammen
- Selber lösen + Fragen + Tipps



n.ethz.ch/~kursulovic

STATIONÄRES MAGNETFELD

Formelsammlung, S. 8-9

ETH zürich

Mindmap

Magnet

Maxwell Glg. (Ampère)/Durchflutung:

$$\Theta := \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \longleftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$$

Magnetische Feldstärke $\vec{H}$

Biot-Savart:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Ursache von $\vec{H}$:

Bewegte Ladung q , Strom I

$$|\vec{F}_2| = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 l}{\rho}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

ext. Strom
Material

Magnetische Flussdichte $\vec{B}$

Maxwell Glg. (Quellenfrei)/mag. Fluss:

$$\Phi := \oiint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0 \longleftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Kraft auf Ladung

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Kraft auf Strom

$$\vec{F} = I(\vec{s} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_{AB} = I \int_A^B d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

MAGNETE

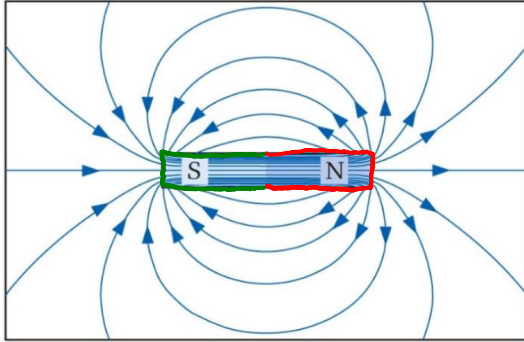


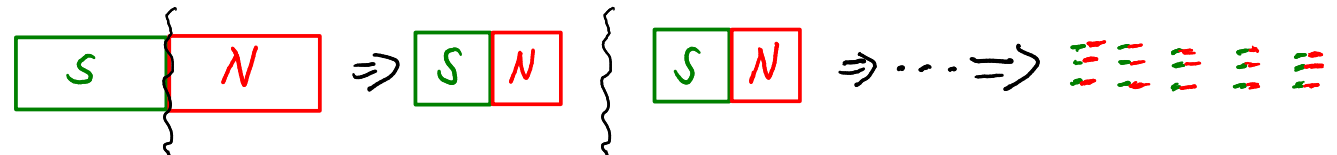
Abbildung 5.2: Verlauf der Feldlinien bei einem Stabmagneten

→ Magnetisches Feld

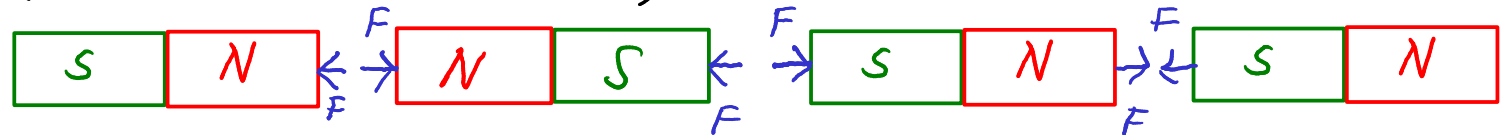
→ Elektrisches Feld

Eigenschaften:

- Im Vergleich zu Ladungen enthält ein Magnet immer Nord- und Südpol (keine einzelnen Pole wie Ladungen)
- Schneidet man einen Magneten, so erhält man wieder Magnete. Bis hin zu Elementarmagneten



- Anziehung und Abstossung hängt von der Orientierung der Pole ab. Gleiche Pole stoßen sich ab, entgegengesetzte ziehen sich an. Ähnlich wie Ladungen



- Die Kräfte können auch mit Feldlinien beschrieben werden, die Feldlinien sind jedoch in sich geschlossen $\Rightarrow$ keine Quellen/Senken. Aussen verlaufen sie vom Nord $\rightarrow$ Südpol innen vom Süd $\rightarrow$ Nordpol
- Ferromagnetische Stoffe (e.g. Eisenspähne) richten sich entsprechen den Feldlinien aus $\Rightarrow$ Influenz.
- Die Kräfte (Feldlinien) bestehen auch im Vakuum

LADUNGEN IM MAGNETFELD



Wenn sich eine Ladung in einem Magnetischen Feld bewegt, dann wirkt auf ihr eine Kraft. Diese Kraft heißt Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$



Merke
geg. für

Pos. Ladungen

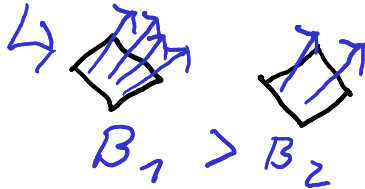
q : Ladung $[q] = C = As$

v : geschwindigkeit $[v] = m/s$

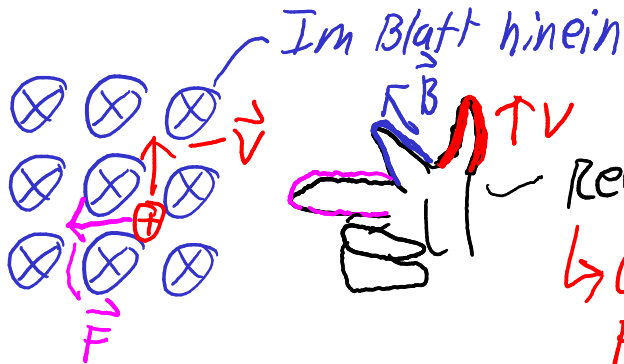
B : Magnetische Flussdichte $[B] = T$ "Tesla"

1 Tesla ist schon
extrem viel!

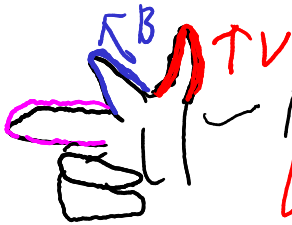
$\Rightarrow$ meist im μT Bereich



Im Gegensatz zur Elektrostatik
fangen wir in der Magnetostatik
gleich mit der Flussdichte an, bzw.
dem bereits abgeschwächten Feld.



Im Blatt hinein



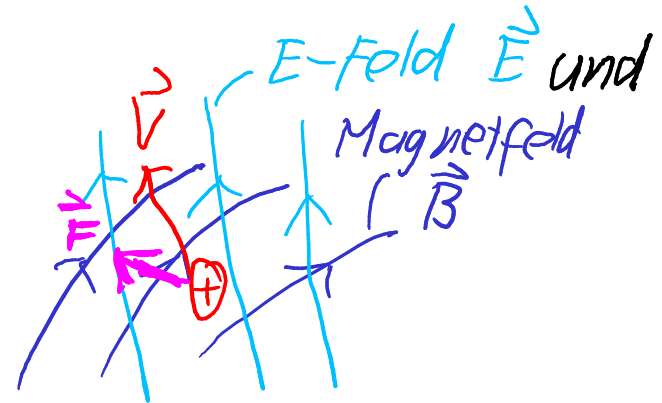
Rechte-Hand

$\hookrightarrow$ Gilt für
Positive
Ladungen

Für Negative
Ladungen

Zeigt F in

entgegengesetzter
Richtung



$$F_{Tot} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Einfach hinzu addiert

STRÖME IM MAGNETFELD

Erinnerung! Bewegte Ladungen sind Ströme!

$$\Rightarrow \vec{F} = I(\vec{s} \times \vec{B})$$

I: Strom $[I] = A$

s: Länge des Leiterstücks, $[s] = m$

dass durch das B-Feld

geht [$\vec{s}$ in richtung I (technische Stromrichtung)]

Prinzip bleibt gleich:



$\vec{B}$ -Feld $\equiv$ Magnetfeld

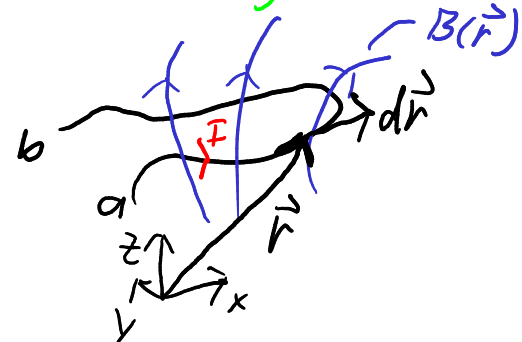
Jedoch ist das $\vec{B}$ -Feld nicht immer gerade
Leiter sind auch nicht immer gerade

$\Rightarrow$ Allgemeine Formulierung:

$$\vec{F} = I \cdot \int_a^b d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$\vec{r}$ = positionsvektor

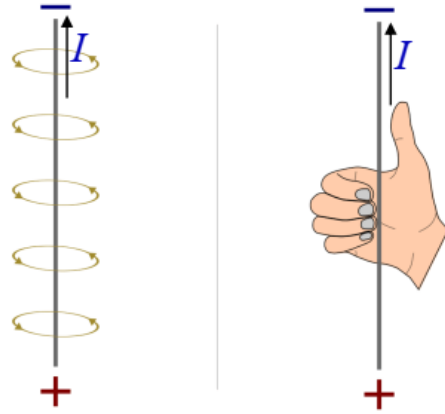
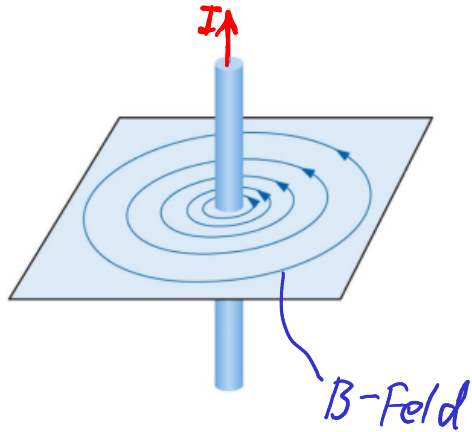
$d\vec{r}$ = tangente
am Leitungsstück



STÖME GENERIEREN MAGNETFELD

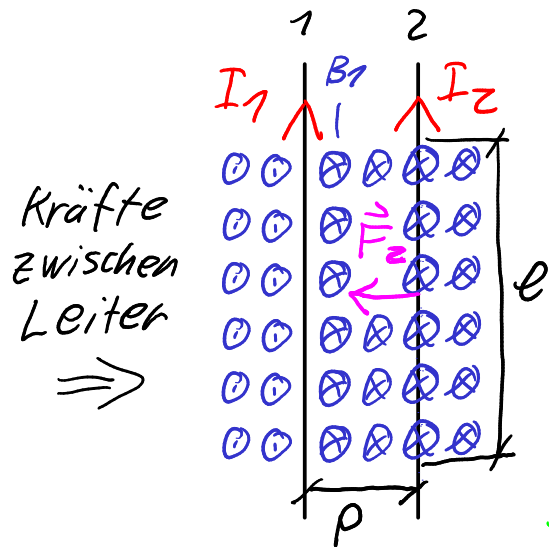
B-Feld um Leiter

Rechte Hand-Regel



Ein Stromdurchflussener Leiter generiert ein radial abnehmendes Magnetfeld.

Einfluss 1 → 2



Kräfte zwischen Leitern
⇒

Vergleich Coulomb Kraft:

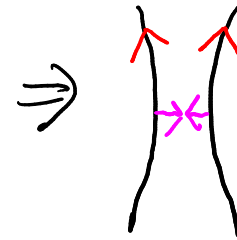
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{|\vec{r}_{12}|^3} \cdot \vec{r}_{12}$$

μ_0 : Permeabilitäts-

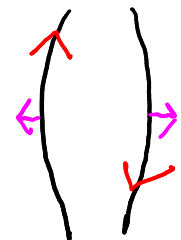
Konstante = $4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

$$|\vec{F}_2| = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2 \ell}{r}$$

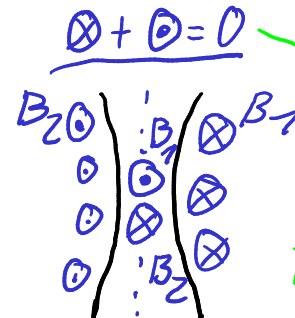
Ströme in gleiche Richtung



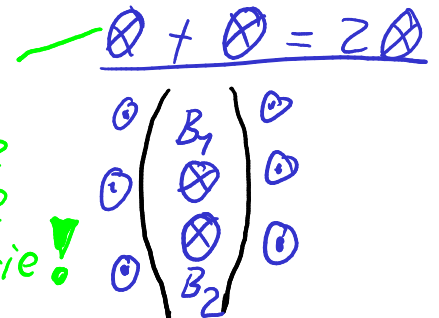
Ströme in entgegengesetzte Richtung



Idee!



Äussere Felder drücken zusammen



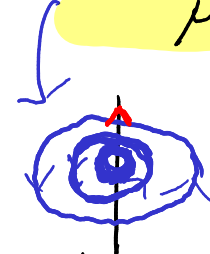
Innere Felder drücken auseinander

Nur Idee keine Theorie!

OERSTEDS GESETZ

Analog zur Elektrostatik, Flussdichte $\rightarrow$ Feldstärke: $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \vec{B}$ $\vec{H}$: Magnetische Feldstärke

~ Auch Ampère Gesetz oder Oersted's Gesetz; Durchflutungsgesetz genannt



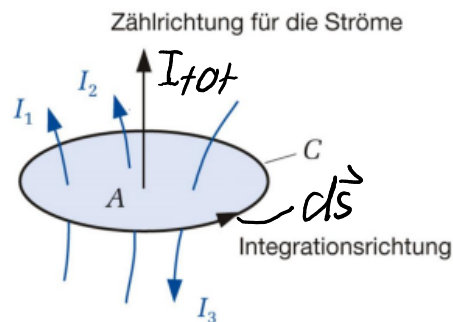
$$[\vec{H}] = \frac{A}{m}$$

$$I_{\text{tot}} = \iint_A \vec{J} d\vec{A} = \oint_C \vec{H} d\vec{s} = \Theta$$

mit $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{H}$ *Ringintegral*

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x H_3 - \partial_z H_2 \\ \partial_z H_1 - \partial_x H_3 \\ \partial_x H_2 - \partial_y H_1 \end{pmatrix}$$

Durchflutung: "Summe aller Ströme, die durch einen geschlossenen Pfad fließen"



3 Bsp. siehe Vorlesungsskides

$\Rightarrow$ ähnlich Elektrostatik mit dem Gauss'schem Gesetz:

$$\iiint_V \vec{D} d\vec{A} = Q$$

Mit den Unterschieden:

- $\partial V \rightarrow A$, Strom durch eine Fläche
- $\iint dA \rightarrow \oint ds$, Oberfläche reduziert sich auf Umfang
- Statt Flussdichte $\rightarrow$ Feldstärke, da man nur eine Feldlinie betrachtet

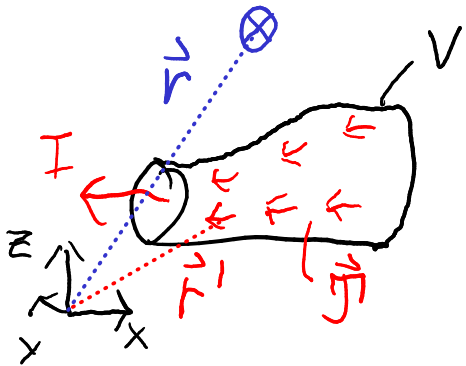
BIOT-SAVART (Wird weniger von hand berechnet)

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Besagt welche Magnetfeldstärke im Punkt $\vec{r}$ herrscht in abhängigkeit von allen Strömen die in einem Volumen fließen.

⇒ Integriert wird über alle Stromdichten über alle Punkte $\vec{r}'$ im Leiter mit Volumen V

Für Beispiel siehe Vorlesungslides



Für spezifische Anordnungen kann folgendes hergeleitet werden:

Magnetische Feldstärke
eines unendlich langen
geraden Leiters

$$\vec{H}(\rho) = \begin{cases} \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi a^2} \rho & \rho \leq a \\ \vec{e}_\varphi \frac{I}{2\pi \rho} & \rho > a \end{cases}$$

ρ , Abstand zum Zentrum des Leiters
 a , Radius des Leiters
 $\vec{e}_\varphi$, Einheitsvektor in φ -Richtung in
Zylinderkoordinaten

Magnetische Feldstärke
im Inneren einer
idealisierten Toroidspule

$$\vec{H}(\rho) = \vec{e}_\varphi \frac{NI}{2\pi \rho}$$

ρ , Abstand zum Zentrum der Spule
 N , Wicklungszahl
 $\vec{e}_\varphi$, Einheitsvektor in φ -Richtung in
Zylinderkoordinaten

Magnetische Feldstärke
im Inneren einer
idealisierten
langgestreckten
Zylinderspule

$$\vec{H} = \vec{e}_x \frac{NI}{l}$$

N , Wicklungszahl
 l , Spulenlänge
 $\vec{e}_x$, Einheitsvektor in x-Richtung

MAGNETISCHE FELDSTÄRKE/-FLUSSDICHTE/-SPANNUNG/-FLUSS

Wir suchen analogien zum E-Feld!

$$\Rightarrow \underbrace{\vec{B}}_{\text{Flussdichte}} = \underbrace{\mu_0 \mu_r}_{\text{Feldstärke}} \vec{H}$$

μ : Permeabilität (kann > 1 sein!)

μ_r : Permeabilitätszahl (im Medium)

μ_0 : Mag. Feldkonst. (im Vakuum)

$$\underbrace{\vec{D}}_{\substack{\text{Flussdichte} \\ \text{Abgeschwächt}}} = \underbrace{\epsilon_r \epsilon_0}_{\substack{\text{Feldstärke} \\ \text{Volle Stärke}}} \vec{E}$$

Magnetische Spannung!

$$V_{m,AB} = \int_A^B \vec{H} d\vec{s}$$

$$V_{e,AB} = \int_A^B \vec{E} d\vec{s}$$

Magnetischer Fluss!

$$\Phi_A = \iint_A \vec{B} d\vec{A}$$

$$\Psi_A = \iint_A \vec{D} d\vec{A}$$

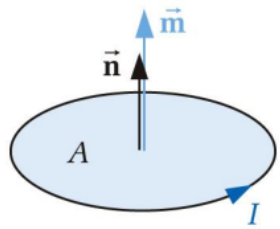
Da aber Magnetfelder quellenfrei sind gilt:

$$\Phi_A = \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{da alles was rein fließt auch raus fließen muss}$$

Gesamtfläche

ENTSTEHUNG MAGNETISIERUNG (Elementarmagnete) (weniger wichtig)

Idee: Magnetischer Dipol:

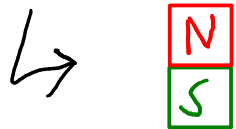


Magnetisches Moment: $\vec{m} = I \cdot A \cdot \vec{n} = I \vec{A}$

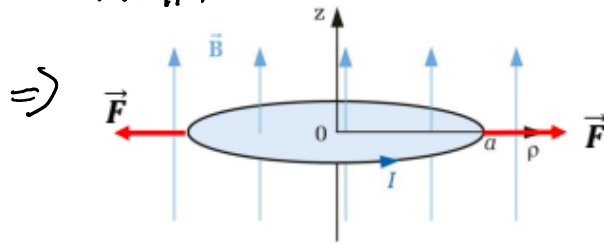
⇒ Mehrere Dipole: $\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_n \vec{m}_n$

"Polarisation" – Prozess des Magnetisierens

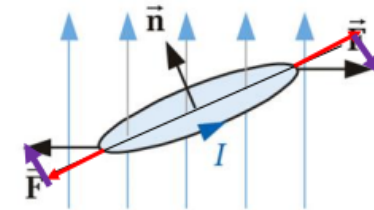
Abbildung 5.19: Magnetischer Dipol



$\vec{m} \parallel \vec{B}$



nicht Parallel
 $\vec{m} \nparallel \vec{B}$



Magnetische Polarisation

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{n=1}^N \vec{J}_n = \mu_0 \vec{M}$$

Basically abgeschwächter Dipol

⇒ Drehmoment entsteht

⇒ Dipol wird entsprechend $\vec{B}$ gedreht.

Weitere Beziehungen:

Beziehung zwischen magnetischer Feldstärke und magnetischer Flussdichte

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + (\mu - \mu_0) \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

μ , Magnetische Permeabilität

Beziehungen zwischen den Feldgrößen, der Magnetisierung $\vec{M}$ und der magnetischen Polarisation $\vec{J}$

$$\vec{J} = (\mu - \mu_0) \vec{H} = \mu_0 (\mu_r - 1) \vec{H} = \mu_0 \chi \vec{H}$$

μ , Magnetische Permeabilität

μ_r , Relative Permeabilität

$\vec{M}$, Magnetisierung

χ , Magnetische Suszeptibilität

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

- (a) Abb. 8 zeigt einen Block aus einem leitenden Material (grau) in einem statischen Magnetfeld $\vec{B}$. In welche Richtung bewegt sich der Block, wenn durch seine Bewegung eine Ladungstrennung wie in der Abbildung gezeigt entsteht? (1.5 P)

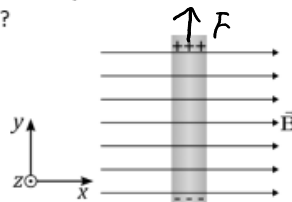


Abb. 8

Mit rechte Hand Regel, wobei Zeigefinger $\hat{=}$ $\vec{B}$, Mittelfinger $\hat{=}$ Ladungsbewegung (Geschwindigkeit) $\vec{v}_q \hat{=}$ Daumen

$\Rightarrow$ Aus der Bildfläche $\Rightarrow +\vec{e}_z$

Da Ladungen im Leiter nach aussen gedrückt werden $\Rightarrow F$ und $\vec{B}$ in $\vec{e}_x$ Richtung

- ☐ $+\vec{e}_x$ (nach rechts)
 ☐ $-\vec{e}_x$ (nach links)
 ☐ $+\vec{e}_y$ (nach oben)
 ☐ $-\vec{e}_y$ (nach unten)
☒ $+\vec{e}_z$ (aus der Bildfläche)
☐ $-\vec{e}_z$ (in die Bildfläche)

- (c) Gegeben sind drei unendlich lange Leiter im Vakuum gemäss Abb. 9, in denen je ein Strom I in die eingezeichnete Richtung fliesst. Es gilt $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Gib alle Richtungen an, in welche die resultierende Kraft auf Leiter 2 wirkt: (1 P)

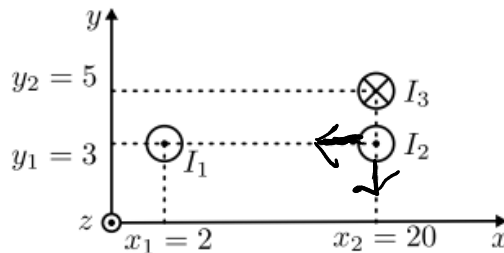


Abb. 9

Es gilt:

$\rightarrow \uparrow \uparrow \leftarrow$ $\leftarrow \uparrow \downarrow \rightarrow$
 F F

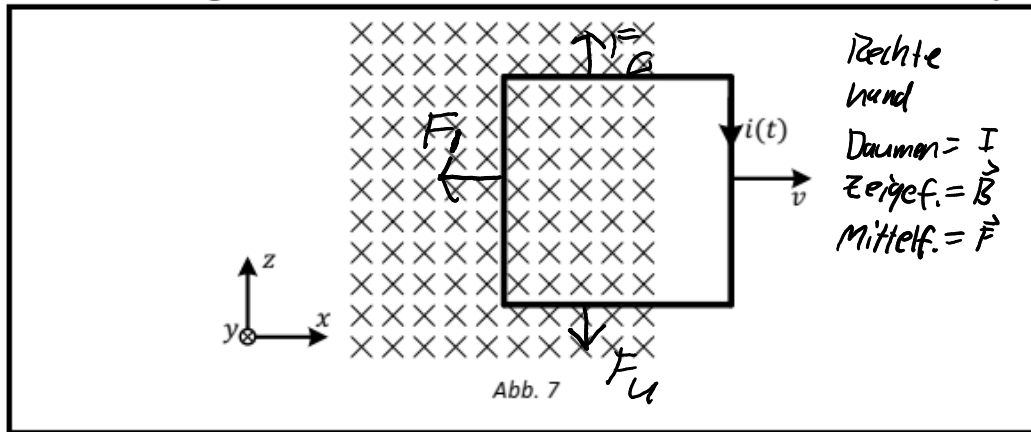
$\Rightarrow -\vec{e}_y - \vec{e}_x$

- ☐ $+\vec{e}_x$ und $+\vec{e}_y$
☐ $-\vec{e}_y$ und $+\vec{e}_z$
☐ $+\vec{e}_x$ und $-\vec{e}_z$
☐ $-\vec{e}_x$ und $+\vec{e}_z$
☐ $-\vec{e}_x$ und $+\vec{e}_y$
☐ $+\vec{e}_x$ und $+\vec{e}_z$
☐ $+\vec{e}_y$ und $+\vec{e}_z$
☐ $-\vec{e}_x$ und $-\vec{e}_y$
☐ $\vec{e}_y$ und $-\vec{e}_z$
☒ $-\vec{e}_x$ und $-\vec{e}_y$

(c) Skizzieren Sie die Richtung der Lorentzkraft auf die individuellen Leiterstücke in Abb. 7.

(1 P)

Lösung:



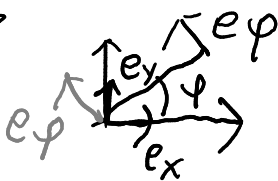
(d) Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{tot}}(t)$, welche auf die Leiterschleife wirkt. Geben Sie das Resultat in Abhängigkeit der Zeit t und des Stroms $i(t)$ an (Das Resultat von (b) muss nicht eingesetzt werden.) Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus (c), um die Rechnung zu vereinfachen. (2 P)

Ober und unten heben sich auf
bleibt links;

$$\underline{\underline{F_{\text{links}} = \vec{F}_{\text{tot}}(t) = i(t) (\vec{s} \times \vec{B}) = -i(t) \cdot a B \cdot \vec{e}_x}}$$

Lösung: $\vec{F}_{\text{tot}}(t) =$

Tips! **Sehr Mühsame Serie, Koordinatenumwandlung, Integrale, DGL**

1. Nutze eine Beziehung aus den Beispielen für $\vec{B}$
Wie wandelt man Polar Koordinaten in kartesischen Koordinaten um?

 $\vec{e}_\phi = ?$ (Wo ist ϕ bei $\vec{e}_\phi$?)
2. Recht Schwer:
$$\iiint_V \vec{J}(\vec{r}) \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dV' = \int_{-\infty}^{\infty} I dx \vec{e}_x \times \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right)$$

wie kann man jetzt die $\vec{r}$ s ausdrücken?
Für b) nutze Wolfram Alpha und vergleiche mit Beispielen in den Vorlesungsslides
3. Denke an Biot-Savart & Oersted, was wann?
Analogie zu E-Felder?
4. Bewegungsgleichung aus Dynamics: $\sum F_i = m \cdot a$
DGL Lösen und Anfangsbed. Nutzen auf Ansatz
Was ist der Radius und von was hängt er ab?
Nutze Ergebnis von b) auf d)